

# PROSTOROVÁ STATISTIKA A NESTEJNOMĚRNOST PLOŠNÉ HMOTNOSTI NETKANÝCH TEXTILIÍ

Jiří Militký , Jitka Rubnerová a Václav Klička \*

**Abstrakt:** Jsou uvedeny základní možnosti popisu fyzikálních vlastností, u kterých hraje významnou roli prostorové uspořádání textilií. Tato data se chápou jako náhodné pole a pro vyjádření jeho variability se používá momentových charakteristik druhého řádu. Je diskutováno použití *prostorové kovariance* (globální variabilita) a méně známého *variogramu* (lokální variabilita) resp. jeho variant. Jsou popsány způsoby konstrukce těchto charakteristik z experimentálních dat. Jsou uvedeny možnosti parametrického vyjádření variogramu. Tyto charakteristiky jsou použity pro vyjádření kolísání lokální plošné hmotnosti netkaných textilií.

## 1. Úvod

Celá řada fyzikálních vlastností plošných textiliích je závislá na místě a někdy i na čase (prostorově časové proměnné). Prostorová resp. plošná variabilita geometrických resp. jiných vlastností je charakteristikou kvality textilií a rozhoduje o jejich praktickém použití.

Prostorově časová variabilita se vyskytuje také při popisu opotřebení, stárnutí a degradace plošných textilií (např. vlivem slunečního záření). V práci [1] byla sledována prostorová variabilita pomocí prostorové autokorelace. V této práci je diskutováno použití variogramu jako jedné ze základních momentových charakteristik druhého řádu. Je ukázána souvislost se známější kovarianční funkcí s ohledem na vhodnost pro různé situace. Navržené charakteristiky jsou použity pro vyjádření variability plošné hustoty speciálních netkaných textilií (pokračování příkladu z práce [1].)

## 2. Základní pojmy

Uvažujme náhodné pole  $z(\mathbf{x})$  se složkami  $z_i = z(\mathbf{x}_i) = z(x_i, y_i)$  určené v  $p$ -tici bodů  $\mathbf{x}_i$  umístěných v oblasti  $D$ . Tyto body mohou tvořit mřížku tj. rektangulární rovnoměrnou síť nebo mohou být uspořádány nerovnoměrně. Kromě prostorové závislosti může být uvažována také časová závislost (viz [2]). Pak se pole  $z(\mathbf{x}_i, t)$  chápe jako  $p$  – rozměrná náhodná veličina s „nezávislými“ realizacemi  $t = 1, T$ . Náhodné pole  $z(\mathbf{x})$  je jednoznačně charakterizováno  $p$  rozměrnou hustotou pravděpodobnosti

$$p_n(z_1, z_2, \dots, z_n) = P\{z_i \leq z(\mathbf{x}_i) \leq z_i + dz_i, \quad i = 1..n\} \quad (1)$$

Důležitý je pojem *homogenní náhodné pole*, které je invariantní vůči posunu. V případě prostorově-časových polí se obvykle uvažuje časová homogenita.

Střední hodnota  $m(\mathbf{x}_i) = E(z_i)$  náhodného pole v místě  $\mathbf{x}_i$  je definována vztahem

---

\* Prof. Ing. Jiří Militký, CSc. a Ing. Jitka Rubnerová, katedra textilních materiálů, Textilní Fakulta, Technická  
Universita v Liberci, 461 17 LIBEREC,  
Ing. Václav Klička CSc., Rieter a.s., Ústí n. Orlicí

$$E(z_i) = \int z_i p(z_i) dz_i \quad (2)$$

Pro vyjádření variability se standardně používá *kovariance* jako druhý smíšený centrální moment

$$C_{ij} = \iint (z_i - E(z_i))(z_j - E(z_j)) p(z_i, z_j) dz_i dz_j$$

resp.

$$C_{ij} = E(z(\mathbf{x}_i) * z(\mathbf{x}_j)) - E(z(\mathbf{x}_i)) * E(z(\mathbf{x}_j)) \quad (3)$$

Pro případ, kdy jsou oba body  $\mathbf{x}_i$  a  $\mathbf{x}_j$  totožné resultuje z rov. (3) rozptyl  $D(\mathbf{x}_i)$ , který lze vyjádřit ve tvaru

$$D(z(\mathbf{x}_i)) = C_{ii} = E(z(\mathbf{x}_i)^2) - (E(z(\mathbf{x}_i)))^2 \quad (4)$$

Speciálně pro vyjádření prostorové nepodobnosti mezi hodnotami  $z$  v místech  $\mathbf{x}_i$  a  $\mathbf{x}_j$  byl zaveden *variogram* resp. *semivariogram*, který je definován jako polovina rozptylu přírůstku  $(z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j))$

$$G_{ij} = 0.5 * D[z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j)]$$

resp.

$$G_{ij} = 0.5 * [E(z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j))^2 - (E(z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j)))^2]$$

Pro *stacionární* náhodné pole je střední hodnota v jednotlivých bodech konstantní tj.  $E(z(\mathbf{x}_i)) = m$ . Pak je

$$G_{ij} = 0.5 * E(z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j))^2 \quad (5)$$

Pro *homogenní náhodné pole* je kovariance funkcí pouze vzdálenosti mezi body  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ,  $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$  a pro *isotropní náhodné pole* je kovariance invariantní vůči rotaci a zrcadlení. Závisí pak pouze na délce  $d = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

Důležitou vlastností řady náhodných polí je *stacionarita druhého řádu*. Náhodné pole  $z(\mathbf{x})$  má vlastnosti stacionarity druhého řádu pokud platí, že

- Průměrná hodnota je konstantní, tj. nezávislá na poloze vektoru  $\mathbf{x}$ . Tedy  $E(\mathbf{x}) = m$ .
- Pro každou dvojici náhodných proměnných  $z(\mathbf{x})$  a  $z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  závisí kovariance pouze na přírůstkovém vektoru  $\mathbf{h}$

$$C(\mathbf{h}) = E[z(\mathbf{x}) * z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] - m^2 \quad (6)$$

Pro rozptyl pak platí, že

$$D(z(\mathbf{x})) = C(\mathbf{h} = 0) = C(0) \quad (7)$$

a variogram souvisí přímo s kovariancí podle vztahu

$$G(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h})$$

resp.

$$C(0) = C(\mathbf{h}) + G(\mathbf{h}) \quad (8)$$

Pro případ satacionarity druhého řádu je tedy celková variabilita vyjádřená rozptylem  $C(0)$  součtem globální složky vyjádřené prostorovou kovariancí  $C(\mathbf{h})$  a lokální složky vyjádřené variogramem  $G(\mathbf{h})$ . Až na násobivou konstantu je poměr  $G(\mathbf{h})/C(0)$  roven Gearyho autokorelačnímu koeficientu a poměr  $C(\mathbf{h})/C(0)$  je roven Moranovu autokorelačnímu koeficientu. Je tedy patrné, že stacionarita druhého řádu umožňuje nalezení souvislosti mezi složkami prostorové variability a prostorové autokorelace. Jde pak o prakticky ekvivalentní nástroje pro popis náhodných polí. V obecném případě však tyto vztahy neplatí a je třeba volit vhodné vyjádření prostorové variability. Pokud neplatí předpoklad konstantnosti střední hodnoty je „necentrováný“ variogram méně vhodný, protože je vychýlený. Dá se použít jeho centrovaná verze

$$G_{ij} = 0.5 * D[(z(\mathbf{x}_i) - E(z_i)) - (z(\mathbf{x}_j) - E(z_j))] \quad (9)$$

která již nevyžaduje prostorovou konstantnost střední hodnoty.

Rov.(8) indikuje, že stacionarita druhého řádu vede k požadavku spojitosti variogramu v počátku, protože  $G(0) = 0$ . Pokud vyjde, že  $G(0) = c_0 > 0$ , znamená to neplatnost stacionarity druhého řádu. Parametr  $c_0$  se označuje jako nugget efekt (důsledek variací malého dosahu v blízkosti počátku). Pokud je  $G(\mathbf{h}) = const.$  pro všechna  $\mathbf{h}$  je náhodné pole  $z(\cdot)$  v tomto směru nekorelované.

Závislost  $G(\mathbf{h})$  na  $\mathbf{h}$  se dá vyjádřit celou řadou parametrických modelů. Často se používá sférický model vyjádřitelný ve tvaru

$$\begin{aligned} G(h) &= c_0 + c[1.5(h/a) - 0.5(h/a)^3] \quad \text{for } 0 \leq h \leq a \\ G(h) &= c_0 + c \quad \text{for } h > a \end{aligned} \quad (10)$$

kde  $h$  je délka vektoru  $\mathbf{h}$ . Rozdělení variogramu a jeho vlastnosti jsou popsány v knize [5], kde jsou také uvedeny způsoby jeho odhadu

Pokud je sledované náhodné pole důsledkem kombinace několika nezávislých zdrojů

s přibližně stejným rozdělením je možno popsat  $z(\mathbf{x})$  pomocí vícerozměrného **Gaussova** (normálního) rozdělení. Pak má tedy rozdíl  $[z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x}+\mathbf{h})]$  normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $2G(\mathbf{h})$ .

Pro odhad variogramu lze v případě prostorově časových dat použít sumarizaci přes časovou proměnnou a nalézt odhad ve tvaru,

$$g_{ij} = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T (z(x_i, t) - z(x_j, t))^2 \quad (11)$$

Jeho rozptyl je roven

$$D(g_{ij}) = \frac{2}{T} G_{ij}^2 \quad (12)$$

Pro případ konstantní střední hodnoty je pak

$$D(g_{ij}) = \frac{2}{T} (0.5 * (c_{ii}^2 + c_{jj}^2) - c_{ij})^2 \quad (13)$$

Odhad kovariance se v tomto případě vyčísluje podle vztahu

$$c_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z(x_i, t) - z_{pi}) * (z(x_j, t) - z_{pj}) \quad (14)$$

Odhad střední hodnoty je počítán ze vztahu

$$z_{pi} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z(x_i, t)) \quad (15)$$

Pro rozptyl odhadu kovariance platí, že

$$D(c_{ij}) = \frac{1}{T} (c_{ii}^2 * c_{jj}^2 + c_{ij}^2) \quad (16)$$

Dá se ukázat, že pro případ vysoké korelace mezi složkami náhodného pole (již od korelačního koeficientu 0.27) je výhodnější použít variogram, protože jeho odhad je efektivnější. Takto definované odhady umožňují posouzení variability resp. míry neshody mezi jednotlivými body v oblasti  $D$ .

Pro případ, kdy se sleduje pouze prostorová proměnná (nejsou k dispozici opakování v různých časech) se provádí sumace s ohledem na délku a orientaci přírůstkového vektoru (obvyčejně se volí pro neregulární síť tolerance délek a směrů, které se považují za přibližně stejné). Takto počítané odhady již posuzují spíše prostorovou autokorelaci, protože se počítají přes celou oblast  $D$ . Pro mřížkové uspořádání je volen přírůstkový vektor jako násobek délky

a výšky jednotkové cely, takže odpadá potřeba stanovení tolerance. Výběrový směrový variogram ve směru přírůstkového vektoru  $\mathbf{h}$  se počítá obecně ze vztahu

$$\mathbf{g}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(x_i) - z(x_i + \mathbf{h})]^2 \quad (17)$$

kde  $N(\mathbf{h})$  je počet dvojic bodů oddělených o vzdálenost  $h$  a orientovaných podle vektoru  $\mathbf{h}$ . Pro mřížkové uspořádání jsou možné pouze tři směry, a délka přírůstkového vektoru je násobkem velikosti elementární cely. Je tedy možné počítat směrový variogram ve směru podélném  $0^\circ$  ( $\mathbf{h} = c*[1,0]$ ), diagonálním  $45^\circ$  ( $\mathbf{h} = c*[1,1]$ ), a příčným  $90^\circ$  ( $\mathbf{h} = c*[0,1]$ ) pro násobky  $c = 1,2,3,\dots$ . Průměrování variogramů ve všech směrech vede k tzv. všesměrovému variogramu (*omnidirectional variogram*).

Místo variogramu lze použít výběrového mandrogramu  $M(\mathbf{h})$ , který má pro přírůstkový vektor  $\mathbf{h}$  tvar

$$M(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} |z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})| \quad (18)$$

Pokud má náhodné pole  $z(\mathbf{x})$  vícerozměrné Gaussovo rozdělení platí jednoduchý vztah

$$\frac{\sqrt{\mathbf{g}(\mathbf{h})}}{M(\mathbf{h})} = \sqrt{p} \quad (19)$$

Je možné také poměrně jednoduše definovat výběrový *standardizovaný variogram* pro přírůstkový vektor  $\mathbf{h}$

$$\mathbf{g}_s(h) = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{h})}{s_1 s_h} \quad (20)$$

kde

$$s_1^2 = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} z(\mathbf{x}_i)^2 - m_1^2 \quad \text{and} \quad m_1 = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} z(\mathbf{x}_i) \quad (21)$$

a

$$s_h^2 = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})^2 - m_h^2 \quad \text{and} \quad m_h = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) \quad (22)$$

Všesměrový *standardizovaný variogram* souvisí úzce s korelogramem  $r(\mathbf{h}) = 1 - \mathbf{g}(\mathbf{h})$ .

Pro výpočet standardizované kovariance s ohledem na přírůstkový vektor  $\mathbf{h}$  se používá vztah

$$C(\mathbf{h}) = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} z(\mathbf{x}_i) * z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - m_1 * m_h \quad (23)$$

Pro grafické vyjádření prostorové variability je možno konstruovat *variogramový povrch*. Jde o soustavu variogramů usprádaných do buněk čtvercové sítě. Začíná se od centrální buňky, která má nulový přírůstkový vektor. Další buňky mají přírůstkový vektor  $\mathbf{h}$  vytvořený jako násobek středové buňky ve směru  $x$  a  $y$ . Na tomto povrchu je možné určit směry anizotropie ve, kterých je variogram nejvíce informativní (viz. [3]).

Pro výpočty související s variogramem lze použít speciální program Variowin 2.2 [3] nebo procedur v jazyku MATLAB 5.3 vytvořených autory této práce.

### 3. Experimentální část

Technická aplikace chemicky pojené textilie obchodního názvu Perlan, například v elektrotechnickém průmyslu pro výrobu hydroizolačních pásek, je podmíněna zaručenou spolehlivostí v podélné pevnosti a tažnosti.

V upraveném stavu jsou u této netkané textilie požadovány zaručené hodnoty v elektrické průrazné pevnosti, nasákavosti a pevnosti v přetrhu. Všechny tyto vlastnosti souvisejí se stejnoměrností uspořádání vláknenných složek a pojiva.

Účelem je popis kolísání plošné hustoty této textilie. Plošná hustota  $z(x)=z(x,y)$  v místě  $\mathbf{x} = (x,y)$  je definována jako hmotnost  $M(S)$  dělená plochou  $S = 4dx dy$  elementárního čtverce tj. plochou příčného řezu objemového elementu o tloušťce odpovídající tloušťce textilie a příčných rozměrech  $x \pm dx$  a  $y \pm dy$ . Formálně je

$$z(x, y) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{M(S)}{S} = t * r(x, y)$$

kde  $\rho(x,y)$  je objemová hustota textilie v místě  $\mathbf{x} = (x,y)$

Vzorky pro gravimetrická měření byly odebrány ve tvaru čtverců rozměrů 100 x 100 mm. Tyto vorky byly rozděleny na rektangulární síť o velikosti cely 10 x 10 mm. Pro textilií o plošné hmotnosti 60 g/m<sup>2</sup> má celá plošného obsahu  $S_j = 100 \text{ mm}^2$  hmotnost kolem 6 mg. Kontrola přesnosti přípravy cel, byla provedena na náhodném výběru 25 vzorků.. Relativní chyba velikosti cely se pohybovala od 0.88% do 1.22%. Hmotnost každé cely  $m_{ij}$  byla určena jako průměr z pěti vážení. Maximální relativní chyba vážení u vzorku 60 g/m<sup>2</sup> byla 1.606%. Hodnoty  $m_{ij}$  pro vzorek pojené textilie plošné hmotnosti 60 g m<sup>-2</sup> jsou uvedeny v práci [4].

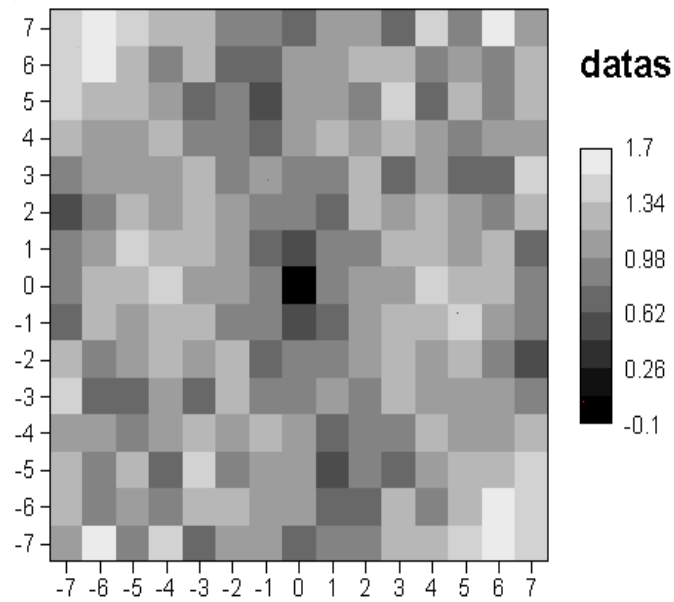
### 4. Výsledky a diskuse

Vzhledem k tomu, že byla použita stejná velikost cel o ploše  $S_j = 100 \text{ mm}^2$  je plošná hustota  $z_{ij} = m_{ij} / S_j$  v [g m<sup>-2</sup>] číselně rovna hodnotám v tab. 1. Základní statistické charakteristiky tohoto pole plošné hustoty jsou uvedeny v tab.1.

Tabulka 1. Základní statistické charakteristiky plošné hustoty

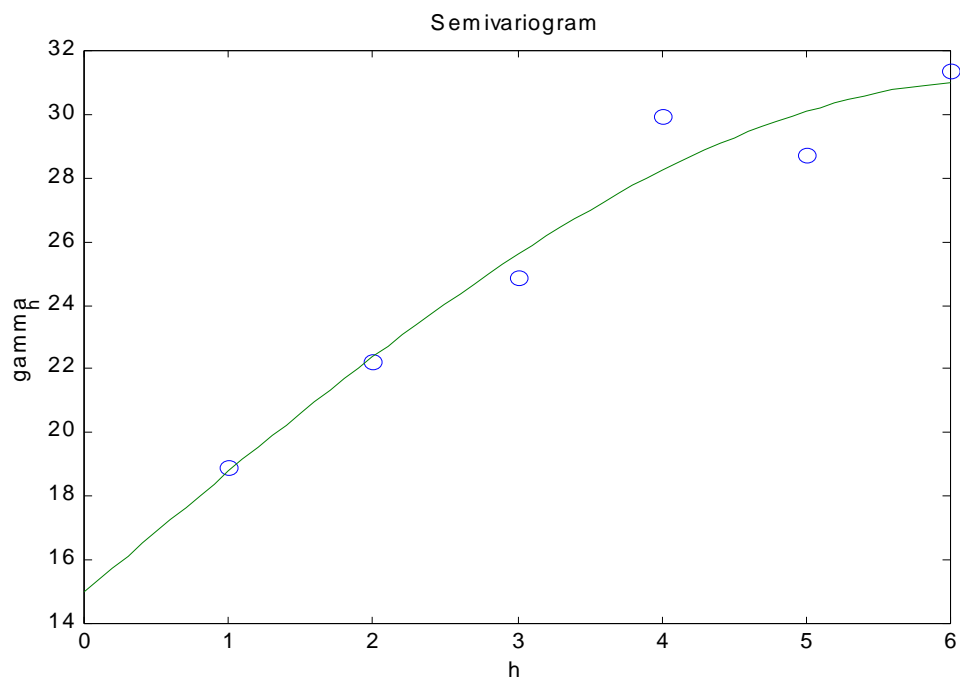
Počet hodnot	100	rozměr
Průměr	58.92	[ g m <sup>-2</sup> ]
Směrodatná odchylka	5,12	[ g m <sup>-2</sup> ]
Variační koeficient	8.68	[%]

Variogramový povrch je ukázán na obr 1.



Obr. 1 Variogramový povrch

Je patrné, že z variogramového povrchu nelze stanovit preferenční směr. Všesměrový variogram je znázorněn na obr 2.



Obr 2. Všesměrový variogram

Je patrná diskontinuita v počátku (nugget efekt). Vypočtené hodnoty všesměrového variogramu, kovariance, korelogramu a madogramu jsou uvedeny v tab. 2 Rozptyl je zde roven  $c(0,0) = 25.937$ .

Tabulka 3. Všesměrové charakteristiky prostorové variability

Posun	Variogram	Covariance	Correlogram	Madogram
1	20.1198	5.1710	0.205	2.557
2	21.1538	2.096	0.0901	2.603
3	24.9066	-2.045	-0.0895	2.839
4	25.1356	-2.272	-0.0994	2.831
5	25.4189	-1.197	-0.0494	2.838
6	25.8043	-0.50	-0.0198	2.867
7	26.4319	1.180	0.0427	2.934

Hodnoty všesměrového variogramu byly použity pro konstrukci sférického modelu definovaného rov (21). Byly nalezeny odhady  $c0 = 14.78013$ ,  $c = 10.99973$  a  $a = 4.642217$ . Indikativní ukazatel kvality proložení vyšel IGF:  $1.8986e-03$  což spolu s grafem na obr 5 indikuje vhodnost sférického modelu (viz. [5]). Je zřejmé, že nugget má poměrně vysokou hodnotu, což indikuje nesplnění předpokladu stacionarity druhého řádu. Tento přechodový typ modelu ukazuje na prostorovou závislost malého dosahu a náhodnost ve větším měřítku [6].

## 5. Závěr

Variogram je jedním ze základních nástrojů pro hodnocení statistické variability náhodných polí. Hodí se při případy vyšších korelací mezi prvky pole. Pro regulární mřížky je možno použít směrového variogramu ve směru podélném, příčném a diagonálním nebo jejich kombinaci- všesměrový variogram. Parametrické modely umožňují vyjádření závislosti variogramu na velikosti a orientaci směrového vektoru. Programy pro vyjádření prostorové variability náhodných polí v jazyce MATLAB 5.3 jsou k dispozici u autorů této práce.

Ukázalo se, že pro zkoumanou netkanou textilii není splněn předpoklad stacionarity druhého řádu: Přechodový typ modelu variogramu plošné hustoty je zřejmě důsledkem prostorové závislosti plošné hmotnosti malého dosahu a náhodnosti kolísání plošné hmotnosti ve větším měřítku

i

## Poděkování

*Tato práce vznikla s podporou grantu GAČR č. 106/99/1184, grantu MŠMT č. VS 97084 a výzkumného záměru MŠMT J11/98:244101113*

## 6. Literatura

- [1] Militký J., Meloun M.: Sborník přednášek z konference „Zajištění analytických výsledků a metod“, Komorní Lhotka 1999
- [2]Royle J.A.: Geophysical Statistics project,DMS 93-12686, Natl. Center for Atmospheric Research, Boulder 1993
- [3] Pannatier Y.: Variowin Software for Spatial Data Analysis, Springer New York 1996
- [4] Klička. V.,: Disertační práce, TU Liberec 1998
- [5] Cressie N.A.C.: Statistics for Spatial Data, J. Wiley, New York 1993
- [6] Militký J., Rubnerová J.,Klička V.:Vzhledová nestejnomyernost netkaných textilií , Sborník z konference STRUTEX 98, Liberec 1998